BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

RİYAZİYYAT

СУЩЕСТВОВАНИЕ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, Я.И.МУСЕИБЛИ

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению существования (как в малом, так и в целом) решения почти всюду одной одномерной смешанной задачи с несамосопряжёнными граничными условиями для одного класса полулинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. В работе с помощью неравенства Беллмана доказана теорема о единственности в целом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи; комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке доказана теорема существования в малом решения почти всюду изучаемой смешанной задачи; кроме того, с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказана теорема существования в целом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе рассматривается следующая одномерная смешанная задача:

$$\begin{cases} u_t(t,x)-u_{xx}(t,x)-\alpha u_{txx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x))\,(0\le t\le T, 0\le x\le 1), & (1)\\ u(0,x)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le 1), & (2)\\ u(t,0)=0\ \ (0\le t\le T),\ u_x(t,0)=u_x(t,1)\ \ (0\le t\le T), & (3)\end{cases}$$

где $\alpha>0$ - фиксированное число; $0<T<+\infty; F,\varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция.

Примем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) будем понимать функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,1]); u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,1))$;

б) условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,1)$.

В данной работе существенно пользуемся следующими двумя фактами:

Лемма 1 (см.[1], стр.297). Последовательности

$$\maltese_0(x)=x,\ldots,\ \maltese_{2k-1}(x)=x\cos 2\pi kx,\ \maltese_{2k}(x)=\sin 2\pi kx,\ \ldots \qquad (4)$$

и

$$\text{✡}_0(x)=2,\ldots,\ \text{✡}^{(x)}_{2k-1}=4\cos 2\pi kx,\ \text{✡}_{2k}(x)=4(1-x)\sin 2\pi kx,\ldots \qquad (5)$$

образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему.

Теорема 1 (см. [1], стр.298-299). Система (4) образует базис в пространстве $L_2(0,1)$ и для любой функции $f(x)\in L_2(0,1)$ справедливы оценки:

$$\frac{3}{4}\|f(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \le 16\|f(x)\|^2_{L_2(0,1)}, \qquad (6)$$

где $f_k \equiv \int_0^1 f(x)\,\text{✡}_k(x)dx$, а функции $\text{✡}_k(x)$ определены соотношением (5).

Далее, так как система (4) образует базис в $L_2(0,1)$ и системы (4) и (5) образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему функций, то очевидно, что каждое решение почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\,\text{✠}_k(x), \qquad (7)$$

где $u_k(t)=\int_0^1 u(t,x)\,\text{✡}_k(x)dx \quad (k=0,1,\ldots)$.

После применения метода, вполне аналогичного схеме метода Фурье, нахождение функций $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений:

$$u_0(t)=\varphi_0+\int_0^t\int_0^1 \text{☞}(u(\tau,x))\,\text{✡}_0(x)dxd\tau \quad (t\in[0,T]), \qquad (8)$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}t\right\}+\frac{1}{1+4\alpha\pi^2k^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^t\int_0^1 \text{☞}(u(\tau,x))\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}(t-\tau)\right\}\text{✡}_{2k-1}(x)dxd\tau \ (k=1,2,\ldots;t\in[0,T]), \qquad (9)$$

$$u_{2k}(t)=-\varphi_{2k-1}\cdot\frac{4\pi k}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}t\right\}\cdot t+\varphi_{2k}\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}t\right\}-$$
$$-\frac{4\alpha\pi k}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\int_0^t\int_0^1 \text{☞}(u(\tau,x))\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}(\tau-t)\right\}\cdot\text{✡}_{2k-1}(x)dxd\tau-$$
$$-\frac{4\pi k}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^3}\cdot\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^1 \text{☞}(u(\sigma,x))\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}(t-\tau)\right\}\cdot\text{✡}_{2k-1}(x)dxd\sigma\right]\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}(t-\tau)\right\}d\tau+\frac{1}{1+4\alpha\pi^2k^2}\cdot\int_0^t\int_0^1 \text{☞}(u(\tau,x))\cdot\exp\left\{-\frac{4\pi^2k^2}{1+4\alpha\pi^2k^2}(t-\tau)\right\}\cdot$$
$$\cdot\,\text{✡}_{2k}(x)dxd\tau \quad (k=1,2,\ldots;\ t\in[0,T]), \qquad (10)$$

где

$$\varphi_k \equiv \int_0^1 \varphi(x) ✡_k(x)dx \ (k=0,1,\ldots), \tag{11}$$

функции $✡_k(x) \ (k=0,1,\ldots)$ определены соотношением (5) и

$$☞(u(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x)). \tag{12}$$

Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма 2. Если $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) ✠_k(x)$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_k(t) \ (k=0,1,\ldots)$ удовлетворяют системе (8)-(10).

Кроме того, при предположениях

$$\varphi(x)\in C^{(1)}([0,1]),\ \varphi''(x)\in L_2(0,1),\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1)$$

устанавливается справедливость оценок:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\cdot\varphi_{2k-1})^2 \le \frac{1}{2\pi^4}\cdot\|\varphi''(x)\|^2_{L_2(0,1)},\ \sum_{k=1}^{\infty}(k^2\cdot\varphi_{2k})^2 \le \frac{1}{2\pi^4}\cdot\|(1-x)\varphi''(x)-2\varphi'(x)\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{13}$$

где числа φ_k определены соотношением (11).

Как видно из (6), если $f(x)\in L_2(0,1)$, то справедлива оценка:

$$\|f(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 . \tag{14}$$

Далее, при предположениях $f(x)\in C([0,1]),\ f'(x)\in L_2(0,1)$ доказывается справедливость оценки:

$$\|f'(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le 2(1+3\pi^2)\left\{f_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k\cdot f_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k\cdot f_{2k})^2\right\}. \tag{15}$$

А при предположениях $f(x)\in C^{(1)}([0,1]),\ f''(x)\in L_2(0,1)$ доказывается справедливость оценки:

$$\|f''(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le 8\pi^2(2+3\pi^2)\left\{f_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\cdot f_{2k-1})^2+\sum_{k=1}^{\infty}(k^2\cdot f_{2k})^2\right\}. \tag{16}$$

Обозначим через $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) ✠_k(x), \tag{17}$$

рассматриваемых на $[0,T]\times[0,1]$, для которых все функции $u_k(t)\in C^{(l)}([0,T])_-$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\left(\max_{0\le t\le T}|u_0^{(i)}(t)|\right)^{\beta_i}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}|u_{2k-1}^{(i)}(t)|\right)^{\beta_i}+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_{2k}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\Bigg\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty\ , \tag{18}$$

где функции $\maltese_k(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ определены соотношением (4), $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i\ge 0, 1\le\beta_i\le 2$ $(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Очевидно, что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,t}}\equiv\sum_{i=0}^{l}\Bigg\{\left(\max_{0\le\tau\le t}\left|u_0^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_{2k-1}^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_{2k}^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\Bigg\}^{\frac{1}{\beta_i}}\ (0\le t\le T). \tag{19}$$

Далее, для функции $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\maltese_k(x)$ функцию $u_k(t)$ назовём её k - той компонентой. Пусть 💣 - любое непустое множество из $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$. Совокупность k -тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_k$. Легко доказывается следующая

Теорема 2. Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

а) для каждого k $(k=0,1,\ldots)$ множество 💣$_k$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon$, один и тот же для всех $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\maltese_k(x)\in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\Bigg\{\sum_{k=k_\varepsilon}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le\tau}\left|u_{2k-1}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le\tau}\left|u_{2k}^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\Bigg\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon\ \ \forall u\in\text{💣}. \tag{20}$$

В работе, пользуясь неравенством Беллмана, доказана следующая теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 3. Пусть

1. $F(t,x,u_1,u_2,u_3)\in C([0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^3)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,1]\times[-R,R]^2\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3)-F(t,x,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{3}\left|u_i-\tilde{u}_i\right|, \tag{21}$$

где $C_R > 0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. $\varphi(x) \in C^{(1)}([0,1])$, $\varphi''(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.
2. $F(t, x, u_1, u_2, u_3) \in C([0,T] \times [0,1] \times (-\infty, \infty)^3)$.
3. $\forall R > 0$ в $[0,T] \times [0,1] \times [-R, R]^2 \times (-\infty, \infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,u_2,u_3) - F(t,x,u_1,u_2,\tilde{u}_3)\right| \le C_R \cdot \left|u_3 - \tilde{u}_3\right|, \tag{22}$$

где $C_R > 0$ – постоянная.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Доказательство. Так как доказательство данной теоремы довольно длинное, то мы дадим лишь схему (идею) её доказательства. Для каждого фиксированного $u \in B^1_{1,T}$ определим в $B^2_{2,T}$ оператор (относительно V) P_u:

$$P_u(V(t,x)) = \tilde{V}(t,x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{V}_k(t) X_k(x), \tag{23}$$

где функции $\tilde{V}_0(t), \tilde{V}_{2k-1}(t)$ и $\tilde{V}_{2k}(t)$ равны, соответственно, правым частям (8), (9) и (10), лишь с той разницей, что везде вместо $F(u(\tau,x))$ нужно брать (т.е. иметь в виду) $F_u(V(\tau,x))$, причём

$$F_u(V(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),V_{xx}(t,x)). \tag{24}$$

Очевидно, что

$$\forall u \in B^2_{2,T} \quad F_u(u(t,x)) = F(u(t,x)), \tag{25}$$

где оператор F определён соотношением (12).

В силу структуры пространства $B^1_{1,T}$ для любого $u \in B^1_{1,T}$ существует такое $R = R_u > 0$, что $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,1]$:

$$-R_u \le u(t,x), u_x(t,x) \le R_u. \tag{26}$$

Тогда, пользуясь оценкой (22) для $R = R_u$, оценками

$$\left|F_u(V(t,x))\right| \le \left|F_u(V(t,x)) - F_u(0)\right| + \left|F_u(0)\right| \le C_{R_u} \cdot \left|V_{xx}(t,x)\right| + A_{R_u} \tag{27}$$

и оценкой (16), легко получить, что при любом фиксированном $u \in B^1_{1,T}$ $\forall V \in B^2_{2,T}$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\|P_u(V)\right\|^2_{B^2_{2,t}} \equiv \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{V}_k(t) X_k(x)\right\|^2_{B^2_{2,t}} \le a_0 + b_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \left\{F_u(V(\tau,x))\right\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + 2b_0 \cdot A^2_{R_u} \cdot T + 2b_0 \cdot C^2_{R_u} \cdot 8\pi^2(2 + 3\pi^2) \cdot \left\|V\right\|^2_{B^2_{2,T}} \cdot T, \tag{28}$$

где

$$a_0 \equiv 2\varphi_0^2 + \left(2 + \frac{T^2}{\alpha^4\pi^6}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^2 \cdot \varphi_{2k-1}\right)^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 \cdot \varphi_{2k}\right)^2, \tag{29}$$

$$b_0 \equiv T \cdot \left\{8 + \frac{1}{\alpha^2\pi^4} + \frac{1}{2\alpha^6\pi^{10}} \cdot [(4\alpha^2\pi^2 + T)^2 + 4\alpha^4\pi^6]\right\}, \tag{30}$$

C_{R_u} - максимум функции $|F(t,x,u_1,u_2,0|$ в замкнутой области $0 \le t \le T$, $0 \le x \le 1$, $-R_u \le u_1, u_2 \le R_u$, причём конечность a_0 следует из оценок (13).

Из (28) следует, что для любого фиксированного $u \in B_{1,T}^1$ оператор Φ_u действует в $B_{2,T}^2$, причём ограниченно.

Далее, аналогично (28), методом математической индукции легко показать, что при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^1$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,T}^2$ и $t \in [0,T]$:

$$\left\|\Phi_u^n(V_1) - \Phi_u^n(V_2)\right\|_{B_{2,t}^2}^2 = \left\|\Phi_u\left(\Phi_u^{n-1}(V_1)\right) - \Phi_u\left(\Phi_u^{n-1}(V_2)\right)\right\|_{B_{2,t}^2}^2 \le$$

$$\le \left\{8b_0 \cdot \pi^2(2+3\pi^2) \cdot C_{R_u}^2\right\}^n \cdot \left\|V_1 - V_2\right\|_{B_{2,T}^2}^2 \cdot \frac{t^n}{n!}, \tag{31}$$

где n – любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u \in B_{1,T}^1$ $\forall V_1, V_2 \in B_{2,T}^2$:

$$\left\|\Phi_u^n(V_1) - \Phi_u^n(V_2)\right\|_{B_{2,T}^2} \le q_n(u) \cdot \left\|V_1 - V_2\right\|_{B_{2,T}^2}, \tag{32}$$

где

$$q_n(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\{8b_0 \cdot \pi^2(2+3\pi^2) \cdot C_{R_u}^2 \cdot T\}^{\frac{n}{2}}. \tag{33}$$

Очевидно, что для достаточно больших $n = n_u : q_n(u) < 1$. Для таких n оператор Φ_u оказывается сжатым в пространстве $B_{2,T}^2$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B_{2,T}^2$ неподвижная точка V оператора Φ_u^n является и единственной в $B_{2,T}^2$ неподвижной точкой оператора Φ_u:

$$V = \Phi_u(V), \quad V \in B_{2,T}^2. \tag{34}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,T}^1$ единственную в $B_{2,T}^2$ неподвижную точку V оператора Φ_u порождаем оператор H:

$$H(u) = V = \Phi_u(V), \tag{35}$$

действующий из $B_{1,T}^1$ в $B_{2,T}^2$.

Далее, показывается, что оператор H действует из $B_{1,T}^1$ в $B_{2,T}^2$ непрерывно и, тем более, он действует в $B_{1,T}^1$ непрерывно. Кроме того, пользуясь теоремой 2 для пространства $B^1_{1,T}$, показывается, что оператор H действует в $B^1_{1,T}$ компактно. Таким образом, оператор H действует в $B^1_{1,T}$ вполне непрерывно.

Пусть ➾_r - фиксированный замкнутый шар пространства $B^1_{1,T}$ радиуса

$$r > \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a_0} \tag{36}$$

и с центром в нуле, где число a_0 определено соотношением (29). Показывается, что при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар ➾_r в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в $B^1_{1,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку u:

$$u = H(u) .$$

В силу того, что оператор H действует из $B^1_{1,T}$ в $B^2_{2,T}$, очевидно, что $u(t,x) \in B^2_{2,T}$.

Так как $u = H(u) = V = \text{⚐}_u(V)$, то $u = V$ и, следовательно,

$$u = H(u) = \text{⚐}_u(u) .$$

Тогда, в силу (25), $\text{♎}_u(u) = \text{☞}(u)$ и, следовательно, для найденной неподвижной точки $u = u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \text{✠}_k(x)$ функции $u_k(t)$ $(k = 0,1,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (8)-(10). Пользуясь этим, легко показывается, что функция $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что условия 1 теоремы 4, наложенные на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточны, но и необходимы для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Наконец, пользуясь процессом доказательства теоремы 4, с помощью усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке доказывается следующая теорема о существовании в целом решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 5. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 4.
2. В $[0,T] \times [0,1] \times (-\infty,\infty)^3$

$$\left| F(t,x,u_1,u_2,u_3 \right| \le C \cdot \left(1 + |u_1| + |u_2| + |u_3|\right), \tag{37}$$

где $C > 0$ - постоянная.

Тогда существует решение почти всюду задачи (1)-(3).

Доказательство. Для доказательства данной теоремы достаточно в процессе доказательства теоремы 4 сделать некоторые изменения и добавления. А именно, пусть H – оператор, введённый в процессе доказательства теоремы 4. Как было показано в процессе доказательства теоремы 4, оператор H действует в пространстве $B^1_{1,T}$ вполне непрерывно.

По определению оператора H:

$$\forall u \in B^1_{1,T} \quad H(u) = V = \wp_u(V),$$

где оператор $\wp$ определён соотношением (23).

Теперь рассмотрим в $B^1_{1,T}$ уравнения

$$u = \lambda H(u), \ 0 \le \lambda \le 1, \tag{38}$$

и априори оценим всевозможные в $B^1_{1,T}$ их решения u. Так как

$$u = \lambda H(u) = \lambda V = \lambda\ \wp_u(V), \tag{39}$$

то, совершенно аналогично (28), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^2_{2,t}} \equiv \|\lambda H(u)\|^2_{B^2_{2,t}} = \|\lambda V\|^2_{B^2_{2,t}} = \|\lambda \wp_u(V)\|^2_{B^2_{2,t}} \le \lambda^2 \cdot a_0 +$$

$$+ \lambda^2 \cdot b_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \{\Phi_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le a_0 + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot \int_0^t \int_0^1 \{\Phi_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau, \tag{40}$$

где числа a_0 и b_0 определены соотношениями (29) и (30), соответственно.

Отсюда, пользуясь неравенством (37), соотношением $\lambda V = u$ и оценками

$$\|u(\tau,x)\|_{C([0,1])} \le C_0 \cdot \|u\|_{B^0_{1,\tau}} \le C_0 \cdot \|u\|_{B^1_{1,\tau}}, \tag{41}$$

$$\|u_x(\tau,x)\|_{C([0,1])} \le C_0 \cdot \|u\|_{B^1_{1,\tau}}, \tag{42}$$

$$\int_0^1 u^2_{xx}(\tau,x) dx \le 8\pi^2(2+3\pi^2) \cdot \|u\|^2_{B^2_{2,\tau}}, \tag{43}$$

$$\|u\|_{B^1_{1,\tau}} \le \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \|u\|_{B^2_{2,\tau}}, \tag{44}$$

где $C_0 = 1 + 2\pi$, получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^2_{2,t}} \le a_0 + 4b_0 \cdot \lambda^2 \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ 1 + \int_0^1 u^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_x^2(\tau,x)dx + \int_0^1 V_{xx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau \le$$

$$\le a_0 + 4b_0 \cdot C^2 \cdot T + 4b_0 \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^1 u^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_x^2(\tau,x)dx + \int_0^1 \lambda^2 V_{xx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau =$$

$$= a_0 + 4b_0 T \cdot C^2 + 4b_0 \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^1 u^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_x^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau \le$$

$$\le a_0 + 4b_0 T \cdot C^2 + 4b_0 \cdot C^2 \cdot \int_0^t \left\{ 2C_0^2 \cdot \|u\|^2_{B^1_{1,\tau}} + 8\pi^2(2+3\pi^2) \cdot \|u\|^2_{B^2_{2,\tau}} \right\} d\tau \le$$

$$\le a_0 + 4b_0 T \cdot C^2 + 4b_0 \cdot C^2 \cdot \left\{ 2C_0^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} + 8\pi^2(2+3\pi^2) \right\} \cdot \int_0^t \|u\|^2_{B^2_{2,\tau}} d\tau. \tag{45}$$

Из (45), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|u\|^2_{B^2_{2,T}} \le \{a_0 + 4b_0 T \cdot C^2\} \cdot \exp\{4b_0\pi^2 \cdot C^2 \cdot [C_0^2 + 8\pi^2(2+3\pi^2)] \cdot T\} \equiv C_*^2 . \quad (46)$$

Таким образом, всевозможные в $B^1_{1,T}$ решения u уравнений (38) априори ограничены в $B^2_{2,T}$ и, тем более, в $B^1_{1,T}$. Тогда, в силу усиленного принципа Шаудера о неподвижной точке, оператор H имеет в $B^1_{1,T}$ неподвижную точку u, которая, как было отмечено в конце процесса доказательства теоремы 4, является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 2. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работ [2]-[5], в которых изучены вопросы существования и единственности решения почти всюду задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. – ДУ, 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Khudaverdiyev K.I., Museibli Y.I. Investigation of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for one class of non-linear pseudoparabolic equations of third order. – GENERAL GUIDE. Abstracts of Third Joint Seminar On Applied Mathematics. Baku State University – Zanjan University, 6-8 September 2002, p.79.
3. Худавердиев К.И., Мусеибли Я.И. Исследование решения почти всюду одной несамосопряжённой одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. – Бакинский Государственный Университет, Баку, 2002 г., 58 стр. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ, г.Баку, 06.11.2002, №2766 – Аз.2002).
4. Худавердиев К.И., Мусеибли Я.И. Исследование решения почти всюду одной несамосопряжённой одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. – Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2002г., №4, с.105-110.
5. Худавердиев К.И., Мусеибли Я.И. Исследование решения почти всюду одной несамосопряжённой одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. – Вестник Университета «Одлар Юрду», 2002г., №7, с.40-48.

BİR SİNİF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB YARIM-XƏTTİ PSEVDOPARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN QLOBAL VARLIĞI

K.İ.XUDAVERDİYEV, Y.İ.MÜSEYİBLİ

XÜLASƏ

Məqalə bir sinif yarım-xətti psevdoparabolik tənliklər üçün bir öz-özünə qoşma olmayan sərhəd şərtli birölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı (lokal və qlobal) məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. İşdə Bellman bərabərsizliyinin köməyilə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin qlobal yeganəliyi haqqında, həmçinin ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin lokal varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir. Bundan başqa, tərpənməz nöqtə haqqında gücləndirilmiş

Şauder prinsipinin кöməyilə baxılan qarışıq məsələnin sanкi hər yerdə həllinin qlobal varlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur.

EXISTENCE IN LARGE FOR ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF THIRD ORDER SEMI-LINEAR PSEUDO-PARABOLIC EQUATIONS

K.I.XUDAVERDIYEV, Y.I.MUSEYIBLI

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence (both in small and in large) of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem with non-self-adjoint boundary conditions for one class of third order semi-linear pseudo-parabolic equations. Uniqueness theorem for almost everywhere solution of the problem under consideration is proved using Bellman inequality. Existence theorem in small almost everywhere solution of the problem under consideration is proved by combining the generalized principle of contraction mappings and the principle of Schauder. Besides, existence theorem in large for almost everywhere solution of the problem under consideration is proved be means of the strengthened principle of Schauder.